Senderos de la Ciencia

Del operador Laplaciano a los procesos difusivos no lineales

Juan Luis Vázquez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Sesión solemne 26 marzo 2014

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EFyN

Distribución

1. Prólogo
2. Matemáticas y ciencia
3. Senderos de la Ciencia
4. El Operador Laplaciano
5. Caminos de la Física y las Matemáticas en el siglo XIX
6. El mundo no lineal que he vivido
7. Los temas de la última década

$\mathcal{E}$xcelentísimo Señor Presidente,

Excelentísimos Señores y Señoras Académicos,

Magníficas e Ilustrísimas autoridades,

Queridos compañeros y amigos

Señoras y señores:

$\mathcal{H}$oy es un día solemne para mí y no puedo menos que empezar agradeciendo la benevolencia con que esta ilustre Academia ha tenido...

Con especial agrado deseo expresar mi reconocimiento a los académicos don Jesús Ildefonso Díaz, don Amable Liñán y don Enrique Castillo, que tan benévolamente me honraron con su propuesta.

$\mathcal{E}$xcelentísimo Señor Presidente,

Excelentísimos Señores y Señoras Académicos,

Magníficas e Ilustrísimas autoridades,

Queridos compañeros y amigos

Señoras y señores:

$\mathcal{H}$oy es un día solemne para mí y no puedo menos que empezar agradeciendo la benevolencia con que esta ilustre Academia ha tenido...

Con especial agrado deseo expresar mi reconocimiento a los académicos don Jesús Ildefonso Díaz, don Amable Liñán y don Enrique Castillo, que tan benévolamente me honraron con su propuesta.

$\mathcal{E}$xcelentísimo Señor Presidente,

Excelentísimos Señores y Señoras Académicos,

Magníficas e Ilustrísimas autoridades,

Queridos compañeros y amigos

Señoras y señores:

$\mathcal{H}$oy es un día solemne para mí y no puedo menos que empezar agradeciendo la benevolencia con que esta ilustre Academia ha tenido...

Con especial agrado deseo expresar mi reconocimiento a los académicos don Jesús Ildefonso Díaz, don Amable Liñán y don Enrique Castillo, que tan benévolamente me honraron con su propuesta.

Me llama la ilustre Academia a ocupar un sillón que ocuparon antes hombres tan destacados por sus capacidades intelectuales como por su amor al trabajo bien hecho y al progreso. Uno de ellos fue don José de Echegaray, que en su discurso de recepción en la Academia hace casi siglo y medio (1866) comenzaba así: “La honra que de esta muy respetable Academia he recibido, honra tan superior á mis méritos, si méritos hay en mí...”

Figura: D. José de Echegaray.

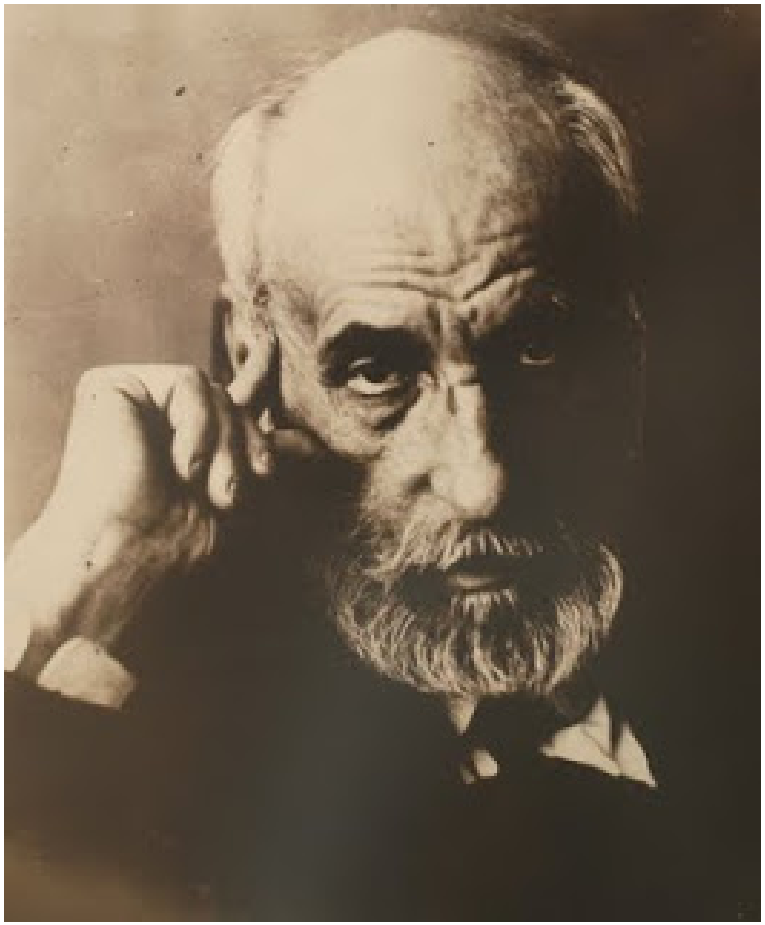


Figura: D. Julio Rey Pastor y D. Santiago Ramón y Cajal

Figura: D. P. Puig Adam, D. E. Terradas y D. G. Millán

I

Matemáticas y Ciencia

Matemáticas y ciencia

Era el siglo XVII, siglo afortunado para algunos países vecinos nuestros, y la Ciencia nace

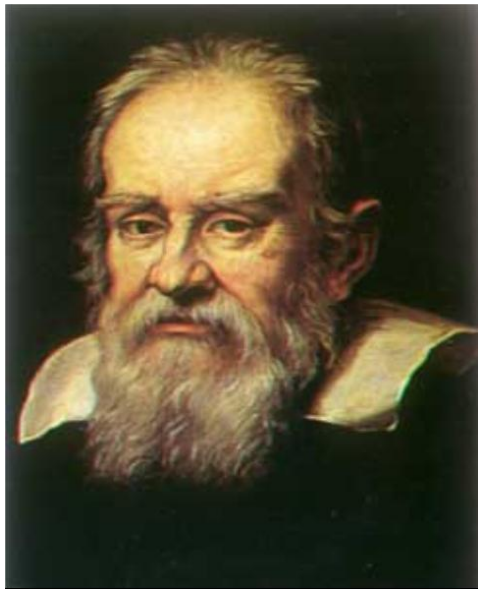


Figura: Francis Bacon, Galileo Galilei y René Descartes

en Inglaterra, Francia e Italia,...

El Código Matemático de la Naturaleza

"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. "

Galileo Galilei, Il Saggiatore, Cap. VI

Época de gigantes

... junto con Alemania y Suiza

Figura: Gottfried Leibniz, Sir Isaac Newton y Leonhard Euler

"On the shoulders of giants"

La gran Francia

Figura: Joseph-Louis Lagrange y Pierre Simon de Laplace

Le Siècle des Lumiéres

Senderos de la Ciencia

Jorge Luis Borges nos legó la imagen de los senderos que bifurcan. La ciencia es una especie de "jardín de senderos que se bifurcan" y cada uno lleva a una sucesión de mundos insospechados.

La ciencia es una especie de "jardín de senderos que se bifurcan" y cada uno lleva a una sucesión de mundos insospechados. Nosotros seguiremos los senderos que parten del Laplaciano.

Isaac Newton dijo de su papel y de la vastedad de lo desconocido:

To myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

Senderos de la Ciencia

Jorge Luis Borges nos legó la imagen de los senderos que bifurcan. La ciencia es una especie de "jardín de senderos que se bifurcan" y cada uno lleva a una sucesión de mundos insospechados.

La ciencia es una especie de "jardín de senderos que se bifurcan" y cada uno lleva a una sucesión de mundos insospechados. Nosotros seguiremos los senderos que parten del Laplaciano.

Isaac Newton dijo de su papel y de la vastedad de lo desconocido:

To myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

II

El Amigo Laplaciano

El Operador Laplaciano

Fórmula

$$\boxed{\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}} \tag{1}$$

Recibe su nombre en honor al gran matemático y astrónomo francés Pierre Simon de Laplace que, un siglo después de los hallazgos de Newton y junto con Siméon Denis Poisson (1781-1840), utilizó este operador en sus estudios de **mecánica gravitatoria** para describir la relación entre una distribución de masas en el espacio $\rho(x, y, z)$ y el gravitatorio que crean, que denotaremos por $U(x, y, z)$. La memoria de Laplace es de 1784, y es de cómodo acceso en las obras completas de Laplace publicadas hacia 1800.

Se tiene entonces que $\Delta(U) = -c\rho$.

Sucedió un siglo después de Newton. La relación entre Laplace y Newton iba a dar grandes frutos.

Operador funcional

Símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace es Δ,

También el más esotérico ∇^2

El Laplaciano es un operador funcional, transforma funciones en funciones

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)=6, \qquad \Delta(e^x+5)=e^x,$$

$$\Delta \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin(\omega x),$$

$$\Delta \sin(\omega x)\cos(\mu y) = -(\omega^2+\mu^2)\sin(\omega x)\cos(\mu y),$$

$$\Delta(x^2-y^2)=0, \qquad \Delta(xyz)=0.$$

Operador funcional

Símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace es Δ,

También el más esotérico ∇^2

El Laplaciano es un operador funcional, transforma funciones en funciones

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)=6, \qquad \Delta(e^x+5)=e^x,$$

$$\Delta \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin(\omega x),$$

$$\Delta \sin(\omega x)\cos(\mu y) = -(\omega^2+\mu^2)\sin(\omega x)\cos(\mu y),$$

$$\Delta(x^2-y^2)=0, \qquad \Delta(xyz)=0.$$

Operador funcional

Símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace es Δ,

También el más esotérico ∇^2

El Laplaciano es un operador funcional, transforma funciones en funciones

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)=6, \qquad \Delta(e^x+5)=e^x,$$

$$\Delta \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin(\omega x),$$

$$\Delta \sin(\omega x)\cos(\mu y) = -(\omega^2+\mu^2)\sin(\omega x)\cos(\mu y),$$

$$\Delta(x^2-y^2)=0, \qquad \Delta(xyz)=0.$$

Operador funcional

Símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace es Δ,

También el más esotérico ∇^2

El Laplaciano es un operador funcional, transforma funciones en funciones

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)=6, \qquad \Delta(e^x+5)=e^x,$$

$$\Delta \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin(\omega x),$$

$$\Delta \sin(\omega x)\cos(\mu y) = -(\omega^2+\mu^2)\sin(\omega x)\cos(\mu y),$$

$$\Delta(x^2-y^2)=0, \qquad \Delta(xyz)=0.$$

Operador funcional

Símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace es Δ,

También el más esotérico ∇^2

El Laplaciano es un operador funcional, transforma funciones en funciones

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)=6, \qquad \Delta(e^x+5)=e^x,$$

$$\Delta \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin(\omega x),$$

$$\Delta \sin(\omega x)\cos(\mu y) = -(\omega^2+\mu^2)\sin(\omega x)\cos(\mu y),$$

$$\Delta(x^2-y^2)=0, \qquad \Delta(xyz)=0.$$

Operador funcional

Símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace es Δ,

También el más esotérico ∇^2

El Laplaciano es un operador funcional, transforma funciones en funciones

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)=6, \qquad \Delta(e^x+5)=e^x,$$

$$\Delta \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin(\omega x),$$

$$\Delta \sin(\omega x)\cos(\mu y) = -(\omega^2+\mu^2)\sin(\omega x)\cos(\mu y),$$

$$\Delta(x^2-y^2)=0, \qquad \Delta(xyz)=0.$$

Las Funciones armónicas

En las regiones del espacio sin masas el potencial gravitatorio satisface la ecuación

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{2}$$

que es la llamada ecuación de Laplace, la ecuación más famosa del Mundo Laplaciano, pero ni mucho menos la única. Acuñada en 1813. También reina en la Física Matemática.

Una función que cumple esta ecuación se llama **armónica**. Son una de las clases de funciones más hermosas de la ciencia y fuente de inspiración desde entonces a hoy. Viven perfectamente tanto en la teoría de físicos y matemáticos como en las aplicaciones de la ingeniería.

Las Funciones armónicas

En las regiones del espacio sin masas el potencial gravitatorio satisface la ecuación

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{2}$$

que es la llamada ecuación de Laplace, la ecuación más famosa del Mundo Laplaciano, pero ni mucho menos la única. Acuñada en 1813. También reina en la Física Matemática.

Una función que cumple esta ecuación se llama **armónica**. Son una de las clases de funciones más hermosas de la ciencia y fuente de inspiración desde entonces a hoy. Viven perfectamente tanto en la teoría de físicos y matemáticos como en las aplicaciones de la ingeniería.

Las Funciones armónicas

En las regiones del espacio sin masas el potencial gravitatorio satisface la ecuación

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{2}$$

que es la llamada ecuación de Laplace, la ecuación más famosa del Mundo Laplaciano, pero ni mucho menos la única. Acuñada en 1813. También reina en la Física Matemática.

Una función que cumple esta ecuación se llama **armónica**. Son una de las clases de funciones más hermosas de la ciencia y fuente de inspiración desde entonces a hoy. Viven perfectamente tanto en la teoría de físicos y matemáticos como en las aplicaciones de la ingeniería.

En el mundo creado alrededor de la Δ
se desarrolla la Cultura Laplaciana.

Muchos matemáticos (y no pocos físicos e ingenieros)
vivimos en ese mundo.

Somos “seguidores del Laplaciano”.

En el mundo creado alrededor de la Δ
se desarrolla la Cultura Laplaciana.

Muchos matemáticos (y no pocos físicos e ingenieros)
vivimos en ese mundo.

Somos “seguidores del Laplaciano”.

En el mundo creado alrededor de la Δ
se desarrolla la Cultura Laplaciana.

Muchos matemáticos (y no pocos físicos e ingenieros)
vivimos en ese mundo.

Somos “seguidores del Laplaciano”.

Preliminares. Geometría y Laplaciano

Las derivadas miden la pendiente o inclinación
He aquí las fórmulas en que arranca el Cálculo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

con unos misteriosos dy y dx, de modo que

$$dy = f'(x)dx, \qquad y = \int f'(x)dx + c$$

Everything should be made as simple as possible, but not simpler, Albert Einstein, 1933

Geometría y Laplaciano

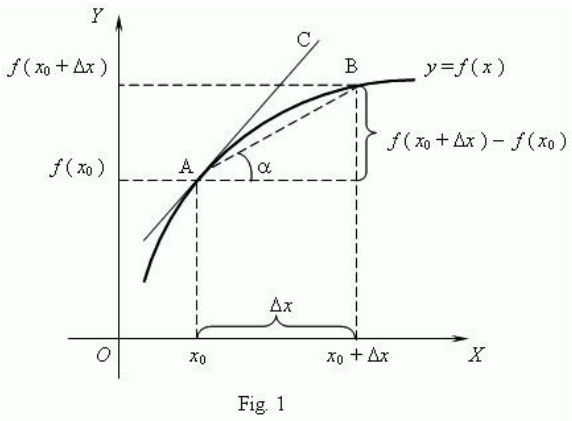


Fig. 1

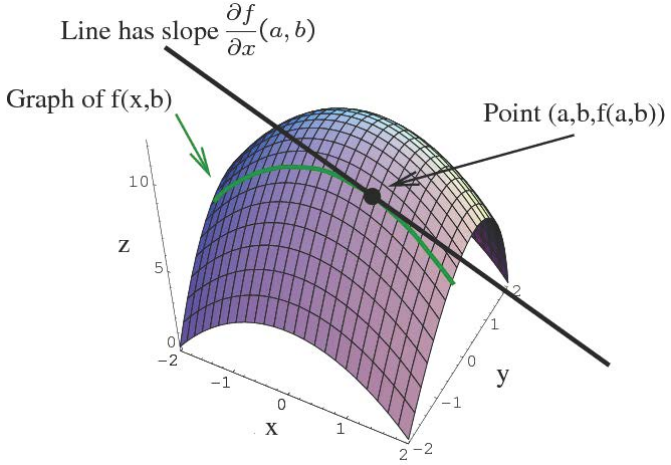


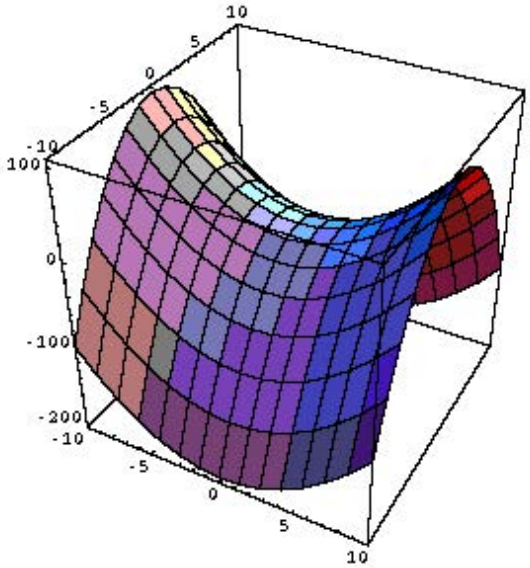
Figura: Derivadas en 1 o dos variables

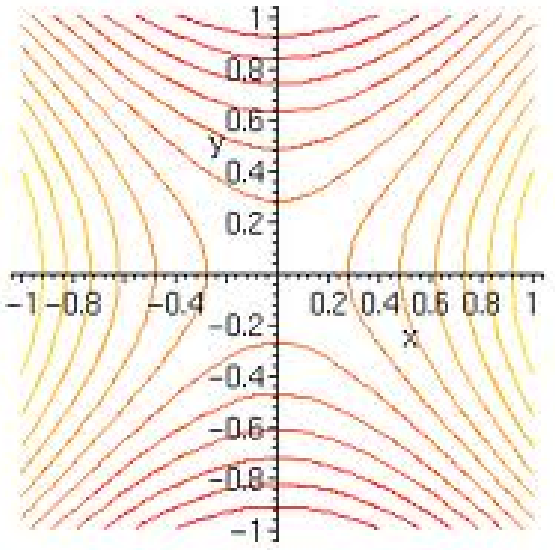
Las derivadas segundas miden la concavidad o convexidad

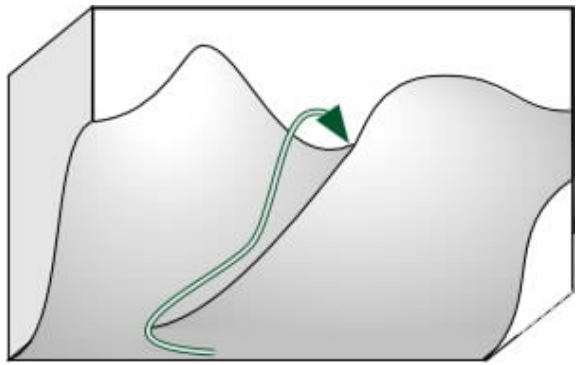
El Laplaciano mide la convexidad media.

Superficies armónicas

Superficies de convexidad media cero; $z = x^2 - y^2$







Cuestión de fondo sobre Geometría y Física

Por qué diablos va a ser importante la convexidad para comprender la Naturaleza.

Por qué precisamente el laplaciano y no otra ensalada de derivadas.

Caminos del siglo XIX

Vuelta al campo gravitatorio. Laplace and Poisson

U es el campo gravitatorio, ρ es la densidad de una masa continua (pensar en una galaxia)

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta U + \rho = 0.$$

El campo eléctrico

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = c\,\rho, \qquad \mathbf{E} = \operatorname{grad} U,$$

donde $\mathbf{E}$ campo eléctrico, ρ distribución de cargas eléctricas ($\pm$ signo)

Nuevos operadores. divergencia $\nabla\cdot$ y gradiente ∇:

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} = \Delta$$

Notable. La ecuación es la misma, solo cambiar "gravitatorio" por "eléctrico". Y admitir signos más y menos. Y pensar en otra rama de la Naturaleza. El poder de la analogía, la unidad subyacente.

Caminos del siglo XIX

Vuelta al campo gravitatorio. Laplace and Poisson

U es el campo gravitatorio, ρ es la densidad de una masa continua (pensar en una galaxia)

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta U + \rho = 0.$$

El campo eléctrico

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = c\,\rho, \qquad \mathbf{E} = \operatorname{grad} U,$$

donde $\mathbf{E}$ campo eléctrico, ρ distribución de cargas eléctricas ($\pm$ signo)

Nuevos operadores. divergencia $\nabla\cdot$ y gradiente ∇:

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} = \Delta$$

Notable. La ecuación es la misma, solo cambiar "gravitatorio" por "eléctrico". Y admitir signos más y menos. Y pensar en otra rama de la Naturaleza. El poder de la analogía, la unidad subyacente.

Caminos del siglo XIX

Vuelta al campo gravitatorio. Laplace and Poisson
U es el campo gravitatorio, ρ es la densidad de una masa continua (pensar en una galaxia)

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta U + \rho = 0.$$

El campo eléctrico

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = c\,\rho, \qquad \mathbf{E} = \operatorname{grad} U,$$

donde $\mathbf{E}$ campo eléctrico, ρ distribución de cargas eléctricas ($\pm$ signo)
Nuevos operadores. divergencia $\nabla\cdot$ y gradiente ∇:

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} = \Delta$$

Notable. La ecuación es la misma, solo cambiar "gravitatorio" por "eléctrico". Y admitir signos más y menos. Y pensar en otra rama de la Naturaleza. El poder de la analogía, la unidad subyacente.

Solución matemática de problemas con Laplacianos.

$$\Delta U + \rho = 0.$$

- Pasar de U a ρ es fácil

Basta saber derivar.

- Pasar de ρ a U es en general difícil

Necesitas saber cálculo integral, núcleos singulares, potenciales, energías, análisis funcional

Los problemas inversos exigen investigadores matemáticos.

Alemania y Francia se pusieron a la tarea

Solución matemática de problemas con Laplacianos.

$$\Delta U + \rho = 0.$$

- Pasar de U a ρ es fácil

Basta saber derivar.

- Pasar de ρ a U es en general difícil

Necesitas saber cálculo integral, núcleos singulares, potenciales, energías, análisis funcional

Los problemas inversos exigen investigadores matemáticos.

Alemania y Francia se pusieron a la tarea

Solución matemática de problemas con Laplacianos.

$$\Delta U + \rho = 0.$$

- Pasar de U a ρ es fácil

Basta saber derivar.

- Pasar de ρ a U es en general difícil

Necesitas saber cálculo integral, núcleos singulares, potenciales, energías, análisis funcional

Los problemas inversos exigen investigadores matemáticos.

Alemania y Francia se pusieron a la tarea

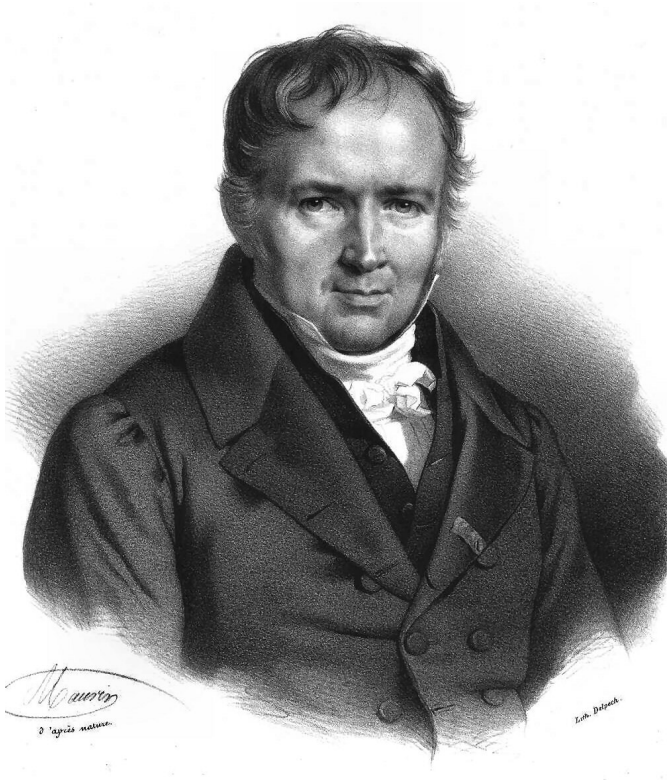


Figura: Peter L. Dirichlet y Simeon Poisson

Principio de Dirichlet

Principio de Minimización de la energía de Dirichlet

$$\mathcal{E}[v(x)] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - vf \right) \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

en un dominio Ω del espacio para funciones derivables (en Ω y su borde) que satisfagan la condición en el borde requerida $v = g$ en $\partial\Omega$.

• Maravilloso: Un cálculo sencillo prueba que los mínimos de este problema, $u(x)$, satisfacen la ecuación de Laplace-Poisson,

$$\Delta u + f = 0.$$

Ecuación de ondas

- Descripción elemental de los movimientos ondulatorios de medios continuos

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \,, \tag{4}$$

donde $u = u(x, y, z, t)$ es una función escalar que describe una propiedad ondulatoria, u_{tt} es la derivada segunda respecto a la variable temporal, una aceleración pues, y c es la velocidad de propagación de las ondas

- La famosa fórmula de las ondas elementales

$$u = A \sin(mx) \sin(kt) \,, \tag{5}$$

con un coeficiente $A > 0$ de amplitud que es arbitrario, y coeficientes m y k sujetos a reglas precisas.

Las ondas elementales no son armónicas ni evolucionan hacia la armonía.

Ecuación del calor

- La ecuación que controla la evolución elemental de los procesos térmicos así como la difusión de sustancias

$$u_t = k\Delta u. \tag{6}$$

- La solución fundamental en el espacio libre es la función Gaussiana,

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-x^2/4t}, \tag{7}$$

donde para empezar el lector puede poner $t = 1$ y descubrir la distribución normal de probabilidad, la famosa "Campana de Gauss", una de las curvas más influyentes en el mundo moderno, que todo estudiante de ciencias, ingeniería, economía o sociología debe saber.

- La conexión Calor-Probabilidad es una de las más profundas del Mundo Laplaciano. Y es ahora cuando podemos mencionar al gran matemático ruso Andrei Kolmogorov.

Fourier y Kolmogorov

Figura: Joseph Fourier y Andrei Kolmogorov

- El método de Fourier

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(x), \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(x) e^{-\lambda_k t} \tag{8}$$

Fluidos

- Ecuación de Euler, no viscosa (es decir, no laplaciana)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0}. \tag{9}$$

En la fórmula $\mathbf{u}$ es la velocidad, p la presión y ρ la densidad del fluido.

- Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u}. \tag{10}$$

El término laplaciano $\mu \Delta \mathbf{u}$ representa la viscosidad de los fluidos reales.

Mecánica cuántica

Ecuación de Schrödinger 1926

$$i\,\hbar\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{11}$$

donde

$$H\psi = -\Delta\psi + V(x)\psi\,, \tag{12}$$

Dado que la ψ es una variable compleja nada es fácil de explicar al profano.

Fluidos y cuantos

Figura: George Gabriel Stokes y Erwin Schrödinger

Senderos que bifurcan

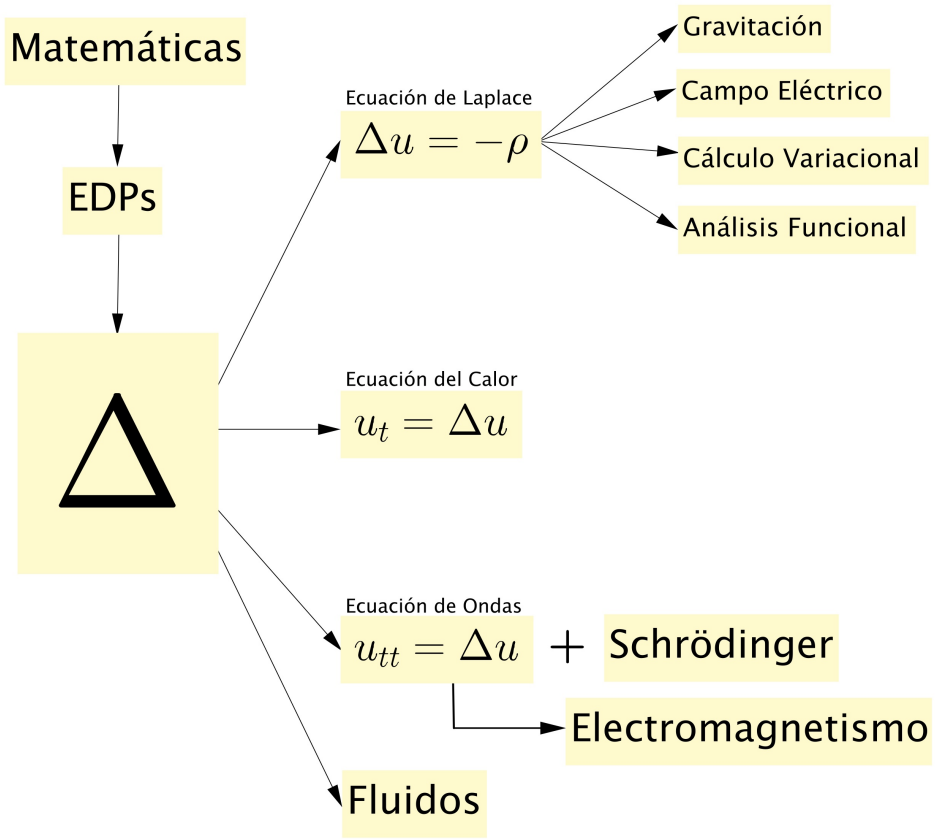


Figura: Algunos de los senderos del siglo XIX (y XX)

III

Un Mundo Que He Vivido

El mundo no lineal

- El éxito del siglo XIX fue ante todo un éxito del análisis lineal. Esa tendencia continua en buena parte del siglo XX.

- Pero ya las ecuaciones escritas por Newton para la gravitación no son lineales. La segunda mitad del siglo XX permite abordar los problemas no lineales de la matemática y la ciencia.

- Palabras del Premio Nobel John Nash de 1958 :

"The open problems in the area of nonlinear P.D.E. are very relevant to applied mathematics and science as a whole, perhaps more so than the open problems in any other area of mathematics"

El mundo que he vivido. Precursores

Figura: Alberto Dou, Miguel de Guzmán y Amable Liñán

La escuela de Brezis

Todo empezó para el autor en 1976

Figura: Haim Brezis entre cursos

una aventura intelectual que aún continua

Años después

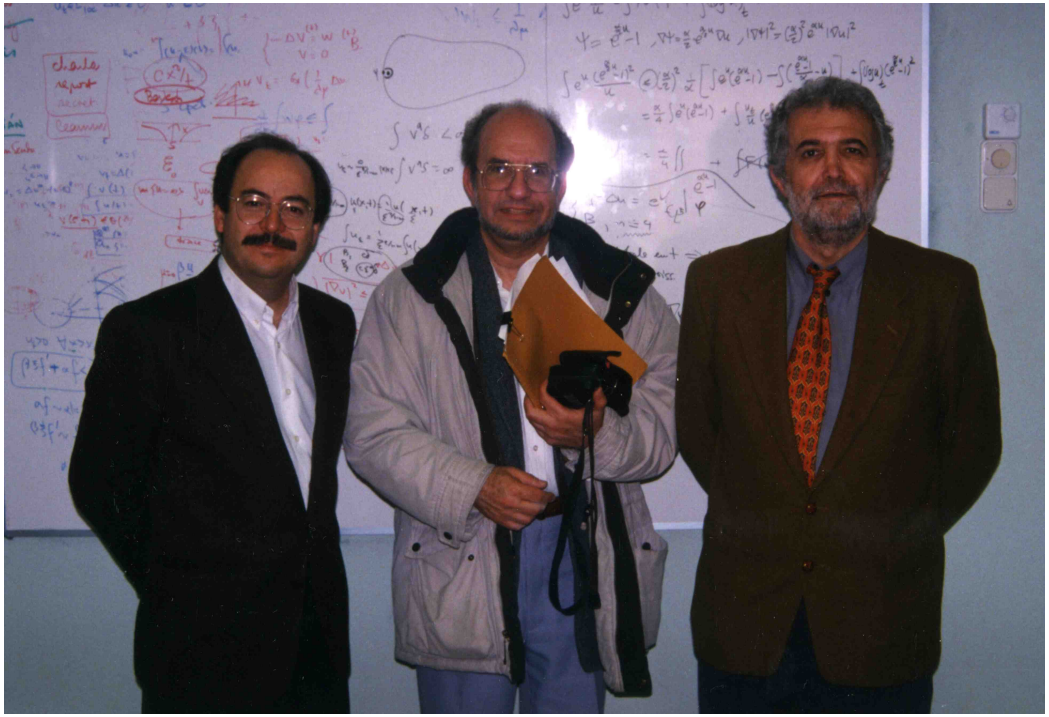


Figura: en Toledo en 2011

Varios cientos de artículos y congresos más tarde.

La experiencia americana

Figura: Luis Caffarelli

Haciendo matemáticas nuevas desde 1981 al presente.

Maestros de Minnesota

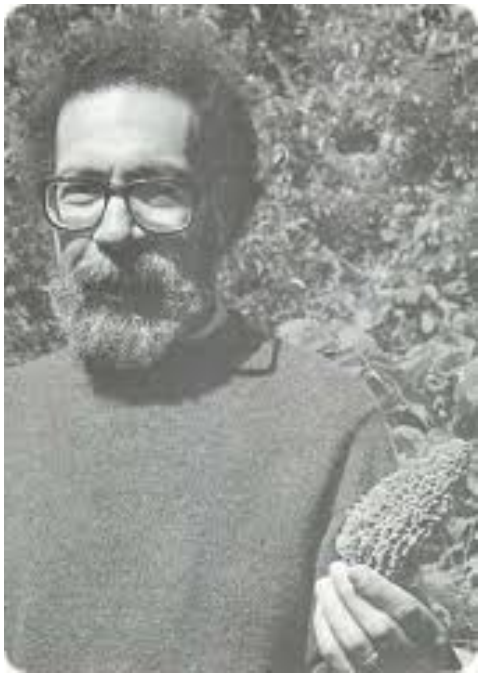


Figura: Don Aronson, Gene Fabes y James Serrin

Teorías de EDPs no lineales. Procesos difusivos

"Modelos de evolución laplaciana no lineal"

$$\partial_t H(x,t,u) = \sum_i \partial_{x_i} A_i(x,t,u,\nabla u) + B(x,t,u,\nabla u)\,, \tag{13}$$

$$\partial_t u = \Delta u^m\,, \qquad m > 1, \tag{14}$$

$$u_t = \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \qquad u_t = \Delta u^m - u^p.$$

$$\partial_t u = \Delta u + f(u)\,. \tag{15}$$

Mi labor científica

- Un comienzo Laplaciano.

Teorías no lineales elípticas. Operadores p-Laplacianos

- Procesos difusivos no lineales.

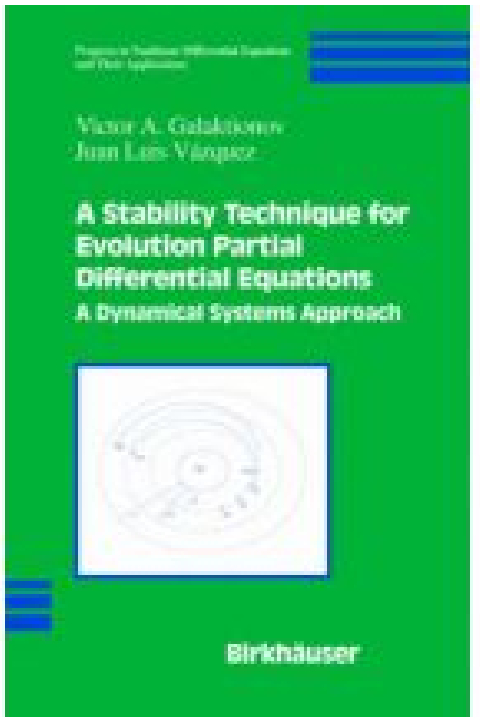
Ecuaciones en medios porosos

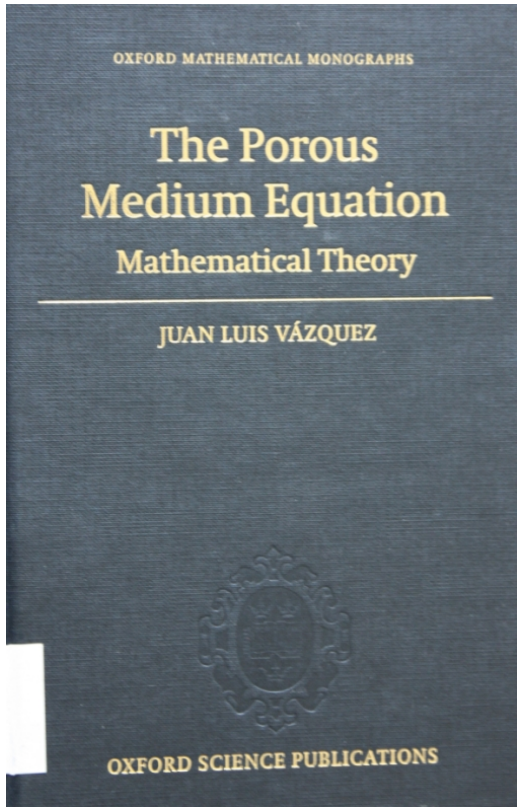
- Los problemas con fronteras libres.
- Comportamiento asintótico.
- Creación de singularidades. Explosión o *Blow-up*
- El mundo de la difusión rápida.
- Desigualdades funcionales.

Título / Autor	Citado por	Año
A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations JL Vázquez Applied Mathematics and Optimization 12 (1), 191-202	787	1984
An L^1-Theory Of Existence And Uniqueness Of Solutions Of Nonlinear Elliptic Equations P Bénilan, L Boccardo, T Gallouët, R Gariepy, M Pierre, JL Vázquez	638	1995
The Porous Medium Equation: Mathematical Theory: Mathematical Theory JL Vázquez Oxford University Press	567	2006
Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems JL Vázquez, H Brezis Revista Matemática Complutense 10 (2), 443	372	1997
Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions VA Galaktionov, JL Vazquez Communications on pure and applied mathematics 50 (1), 1-67	256	1997
The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations VA Galaktionov, JL Vázquez Discrete and continuous dynamical systems 8 (2), 399-434	248	2002
The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential JL Vazquez, E Zuazua Journal of Functional Analysis 173 (1), 103-15	210	2000
On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media JR Esteban, JL Vázquez Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 10 (11), 1303-1325	179	1986

Título / Autor	Citado por	Año
An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation JL Vázquez Shape optimization and free boundaries, 347-389	161	1992
Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space JL Vázquez Nonlinear Evolution Equations and Related Topics, 67-118	135	2004
A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation LA Caffarelli, JL Vázquez Transactions of the American Mathematical Society 347 (2), 411-441	120	1995
Asymptotic behaviour and source-type solutions for a diffusion-convection equation M Escobedo, JL Vázquez, E Zuazua Archive for rational mechanics and analysis 124 (1), 43-65	114	1993
A stability technique for evolution partial differential equations: a dynamical systems approach VA Galaktionov, JL Vázquez Springer	113	2004
Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the p-Laplacian equation S Kamin, JL Vázquez Rev. Mat. Iberoamericana 4 (2), 339-354	108	1988
Lipschitz continuity of solutions and interfaces of the N-dimensional porous medium equation LA Caffarelli, JL Vázquez, NI Wolanski Indiana University mathematics journal 36 (2), 373-401	106	1987
Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of gas in a porous medium		

The Books





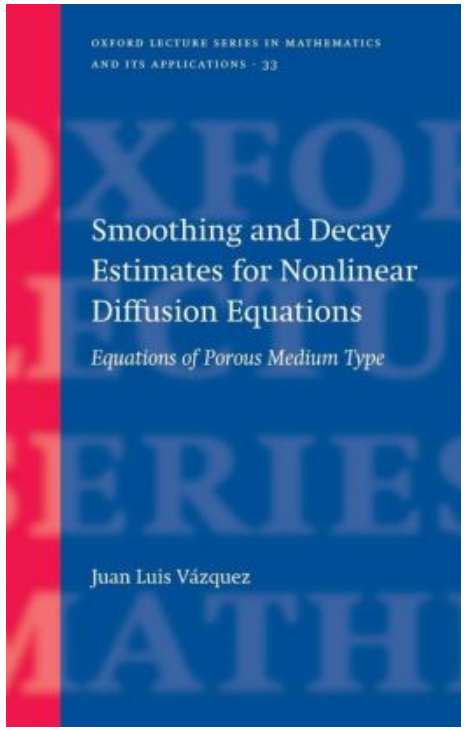


Figura: Los libros de los años 2000

.

Porous Medium, Stability and Smoothing

Mi mejor libro

Vázquez, Juan Luis The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007. xxii+624 pp.

Segundo libro más citado en Matemáticas entre los publicados en 2007.

From the review for the Mathscinet Database by Vicentiu Radulescu,
This book is a pleasure to read. It will be an excellent source, allowing the reader to build a proper intuition and to understand the basic facts of the theory. ... This book is also strongly recommended to researchers in Applied Mathematics who study various linear and nonlinear phenomena, but it may also be useful and comprehensive for a broader community of mathematicians, physicists, and engineers. I deeply believe that the present book is one of the most important works in its field that have appeared until now.

Mi mejor libro

Vázquez, Juan Luis The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007. xxii+624 pp.

Segundo libro más citado en Matemáticas entre los publicados en 2007.

From the review for the Mathscinet Database by Vicentiu Radulescu,
This book is a pleasure to read. It will be an excellent source, allowing the reader to build a proper intuition and to understand the basic facts of the theory. ... This book is also strongly recommended to researchers in Applied Mathematics who study various linear and nonlinear phenomena, but it may also be useful and comprehensive for a broader community of mathematicians, physicists, and engineers. I deeply believe that the present book is one of the most important works in its field that have appeared until now.

Mi mejor libro

Vázquez, Juan Luis The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007. xxii+624 pp.

Segundo libro más citado en Matemáticas entre los publicados en 2007.

From the review for the Mathscinet Database by Vicentiu Radulescu, *This book is a pleasure to read. It will be an excellent source, allowing the reader to build a proper intuition and to understand the basic facts of the theory. ... This book is also strongly recommended to researchers in Applied Mathematics who study various linear and nonlinear phenomena, but it may also be useful and comprehensive for a broader community of mathematicians, physicists, and engineers. I deeply believe that the present book is one of the most important works in its field that have appeared until now.*

Congreso de 2006

Figura: ICM, Congreso Mundial de 2006

la conferencia más famosa de una larga serie

Temas de la última década

1. Entropías como clave del mundo asintótico
2. Estimaciones de tipo Harnack
3. La difusión fraccionaria
4. Fronteras libres y biología

Temas de la última década

1. Entropías como clave del mundo asintótico
2. Estimaciones de tipo Harnack
3. La difusión fraccionaria
4. Fronteras libres y biología

Temas de la última década

1. Entropías como clave del mundo asintótico
2. Estimaciones de tipo Harnack
3. La difusión fraccionaria
4. Fronteras libres y biología

Temas de la última década

1. Entropías como clave del mundo asintótico
2. Estimaciones de tipo Harnack
3. La difusión fraccionaria
4. Fronteras libres y biología

The Hele-Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth

Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid

Project with Benoît Perthame and Fernando Quirós
Main paper to appear in ARMA

Free Boundaries and Moving Interfaces Workshop
Mathematical Institute, Oxford
20 to 22 February 2014

Figura:

La difusión no local y el laplaciano fraccionario

- Mi último gran proyecto se refiere al estudio de un tipo de difusión no local con interacciones a larga distancia

- El modelo de operador es el "operador lapaciano fraccionario". Su definición no es fácil, salvo que uno tome la transformada de Fourier, pues su símbolo de Fourier es $|\xi|^{2s}$ con $0 < s < 1$.

- Un amplio espectro de problemas puros y aplicados son estudiados por investigadores en todo el mundo, en particular en España. Tras los trabajos decisivos de Luis Caffarelli, la teoría matemática rigurosa ha tomado vuelo.

Este es el equipo que ha colaborado intensamente conmigo en tiempos recientes: Fernando Quirós, Ana Rodríguez, Arturo de Pablo, Matteo Bonforte, Bruno Volzone y los alumnos doctorales Diana Stan y Félix del Teso (que realizó los gráficos de los senderos que les muestro).

Senderos que bifurcan

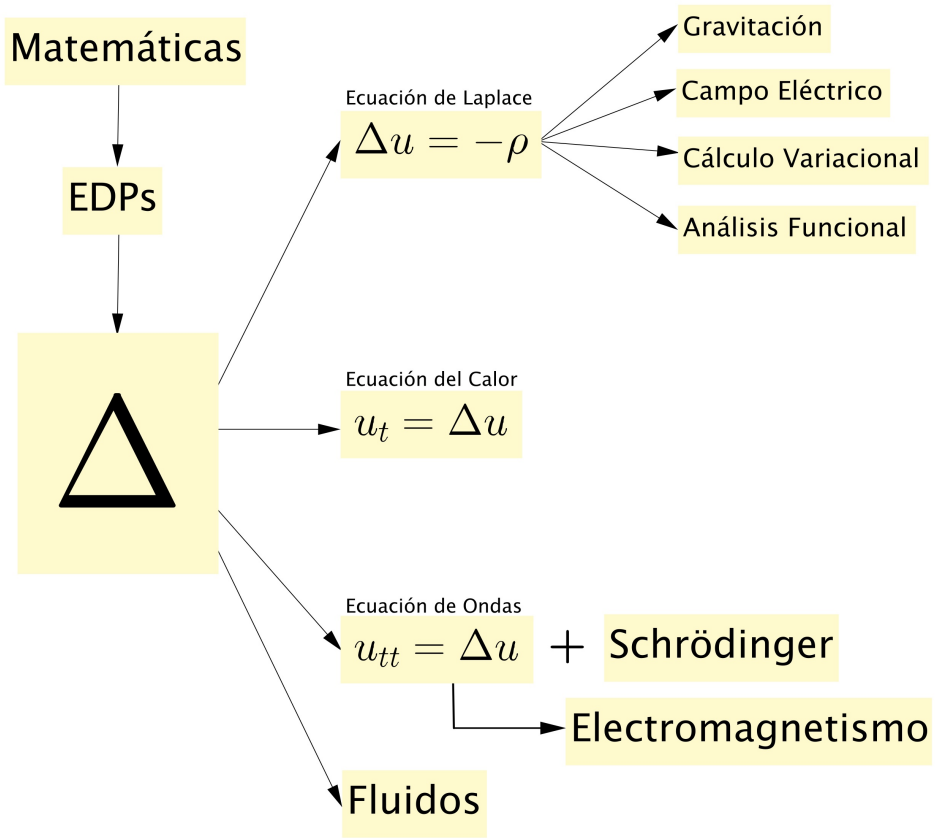


Figura: Algunos de los senderos antiguos

Senderos que bifurcan

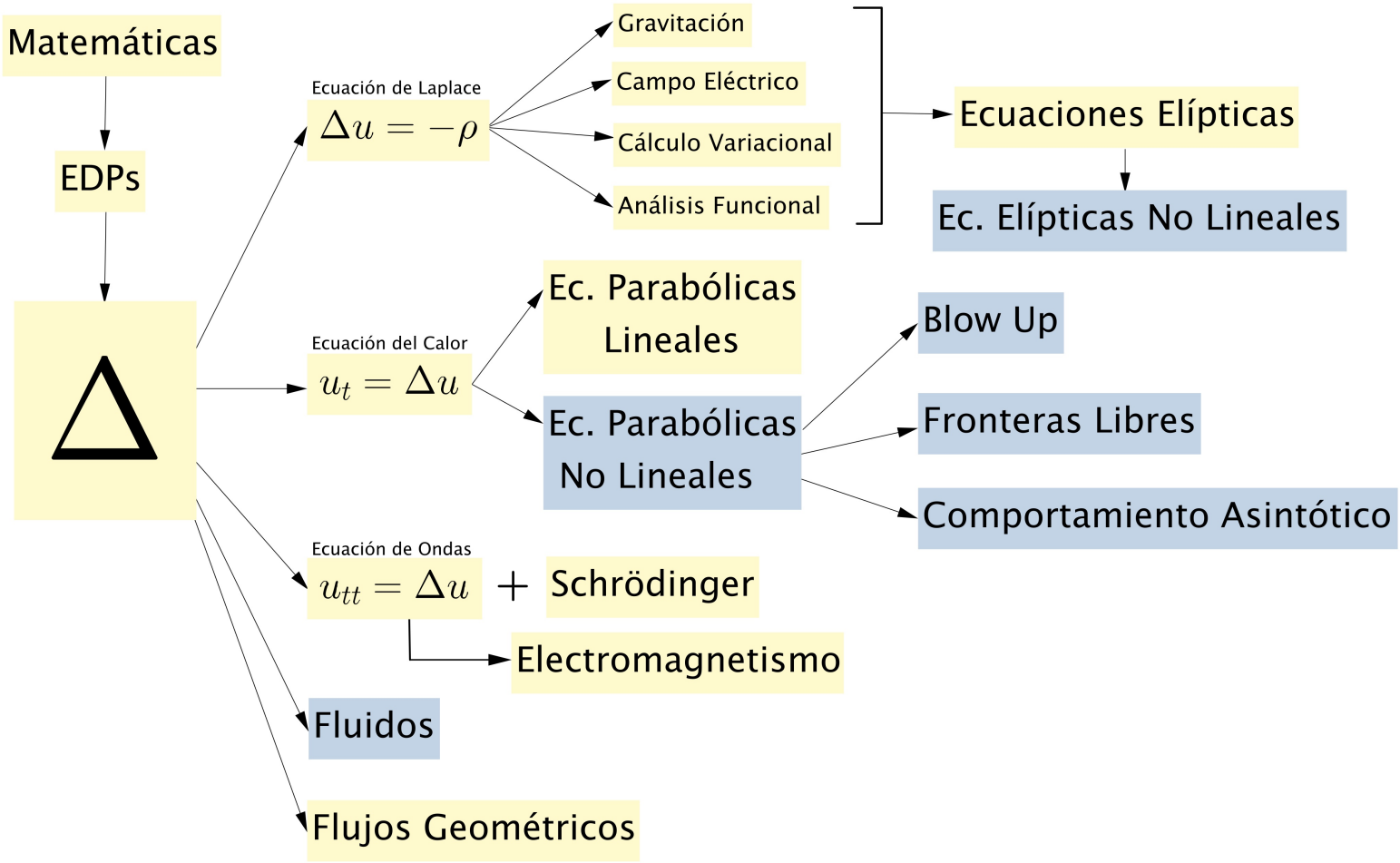


Figura: Algunos de los senderos recientemente transitados

Reflexión

El enorme avance de la investigación matemática en España en los últimos 40 años es el resultado del esfuerzo, la inteligencia y la apertura mental de toda una generación a la que he tenido la suerte de pertenecer, y de las que la antecedieron y la siguen próximamente en el tiempo. De tantas de esas personas se podría decir así:

Intellectu, corde, virtute, et maxime actu praeclari
Ii magno studio, vanitate loquendi repulsa,
Patriae servandae quod opus erat perfecerunt,
Laudemque novam apud nationes obtinuere.

Reflexión

El enorme avance de la investigación matemática en España en los últimos 40 años es el resultado del esfuerzo, la inteligencia y la apertura mental de toda una generación a la que he tenido la suerte de pertenecer, y de las que la antecedieron y la siguen próximamente en el tiempo. De tantas de esas personas se podría decir así:

Intellectu, corde, virtute, et maxime actu praeclari
Ii magno studio, vanitate loquendi repulsa,
Patriae servandae quod opus erat perfecerunt,
Laudemque novam apud nationes obtinuere.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable,
los profetas del pasado error aún numerosos,
pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro,
el ánimo en fin no ha de faltarnos.
Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable,
los profetas del pasado error aún numerosos,
pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro,
el ánimo en fin no ha de faltarnos.
Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable, los profetas del pasado error aún numerosos, pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro, el ánimo en fin no ha de faltarnos.

Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable,
los profetas del pasado error aún numerosos,
pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro,
el ánimo en fin no ha de faltarnos.
Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable,
los profetas del pasado error aún numerosos,
pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro,
el ánimo en fin no ha de faltarnos.

Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable,
los profetas del pasado error aún numerosos,
pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro,
el ánimo en fin no ha de faltarnos.

Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Desearía pues que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de tantos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

La dificultad es grande, el desconcierto palpable,
los profetas del pasado error aún numerosos,
pero la meta es noble, el camino probado y el ejemplo claro,
el ánimo en fin no ha de faltarnos.

Yo deseo que los más jóvenes recorran el ancho mundo con ojos de sorpresa, como nosotros hemos tenido la suerte de hacer.

Confío en que D. J. Echegaray y D. S. Ramón y Cajal,

que nos miran desde el atrio,

puedan ya estar más tranquilos.

♠

Gracias por su atención

Confío en que D. J. Echegaray y D. S. Ramón y Cajal,

que nos miran desde el atrio,

puedan ya estar más tranquilos.

♠

Gracias por su atención